

Численное описание эффекта дисперсионной рефракции с помощью нестационарного параболического уравнения

§ 1. Синтез волновых пакетов с поперечной частотной модуляцией

Прежде чем перейти к основной теме настоящей главы, рассмотрим вопрос синтеза волновых пакетов с поперечной частотной модуляцией в однородной среде.

Исходя из наиболее вероятной практической возможности использования эффекта дисперсионной рефракции в ионосферном распространении коротких радиоволн, будем рассматривать синтез пакетов применительно к этой задаче.

Пусть излучатель электромагнитных волн находится на поверхности Земли. Пусть неоднородная волновая структура, которая проявляется в зависимости частоты ω излучаемой волны от угла возвышения ϕ , формируется в однородной бездисперсной среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1$ до того, как волна достигнет ионосферы. В случае малых углов возвышения (обычная ситуация при радиосвязи и загоризонтной локации), расстояние ρ от излучателя до входа в ионосферу составляет не менее 500 км [48, 73].

Поскольку ρ значительно больше длины волны ($\lambda = 10\text{--}100$ м), а также возможной, физически реализуемой высоты излучателя $h = 10\text{--}100$ м, соотношение $\lambda/\rho \sim h/\rho \ll 1$ будем использовать в качестве малого параметра задачи.

Электрический вектор \mathbf{E} можно выразить через векторный потенциал \mathbf{A}_e и скалярный потенциал ϕ_e как [23, 54, 70]

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_e - \frac{\partial\mathbf{A}_e}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Скалярный потенциал ϕ_e описывает статическую компоненту поля, существенную только в ближней зоне излучателя, т.е. на расстояниях, соизмеримых с длиной волны, следовательно, его можно исключить из рассмотрения в силу малости λ/ρ . В этом случае электрический вектор \mathbf{E} выражается формулой

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} \quad (3.2)$$

и описывается уравнением для векторного потенциала

$$\nabla^2 \mathbf{A}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.3)$$

где \mathbf{J} – плотность сторонних токов.

Для однородной среды решение уравнения (3.3) может быть записано в интегральной форме:

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}, t - \mathbf{R}/c)}{\mathbf{R}} dV. \quad (3.4)$$

Здесь V – область, занимаемая сторонними токами, \mathbf{R} – радиус-вектор точки наблюдения.

Уравнение запаздывающих потенциалов (3.4) может быть упрощено, принимая во внимание малость h/ρ :

$$\mathbf{A}_e(\rho, \phi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\rho} \int_0^h J(z, t - (\rho - z \sin \phi)/c) dz, \quad (3.5)$$

где z – вертикальная координата, совпадающая с апертурой антенны, ρ – расстояние от точки $z = 0$ до точки наблюдения, ϕ – угол возвышения.

Условие монохроматичности $J(z, t) = j(z) \exp(-i\omega t)$ позволяет непосредственно из (3.2) и (3.5) получить распределение поля $E(\rho, \phi, t)$ в дальней зоне:

$$E(\rho, \phi, t) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi c\rho} \exp\left(i\frac{\omega}{c}\rho - i\omega t\right) \int_{-\infty}^{\infty} j(z) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\phi z\right) dz. \quad (3.6)$$

В (3.6) функция $\sin \phi$ заменена аргументом ϕ из условия малости углов возвышения, пределы интегрирования распространены на бесконечность, помня, что ток локализован в области $h \ll \rho$. Уравнение (3.6) хорошо известно и часто используется при синтезе антенн [22, 23, 25, 71].

Основываясь на этом уравнении, рассмотрим синтез амплитуды тока $j(z, t)$, который в дальней зоне формирует волну с

поперечной частотной модуляцией

$$E(\rho, \phi, t) \sim \frac{1}{\rho} \exp \left\{ i \left[\frac{\omega + \alpha \phi}{c} \rho - (\omega + \alpha \phi) t \right] \right\} \quad (3.7)$$

на расстоянии ρ от излучателя в достаточно малом диапазоне углов $-\phi_1 < \phi < \phi_1$. Пусть вне этих углов напряженность поля равна нулю, т.е. мы будем синтезировать идеальный излучатель без боковых лепестков. При $\alpha \phi_1 \ll \omega$ уравнение (3.7) описывает квазимонохроматическую волну со слабой поперечной частотной модуляцией (α – коэффициент угловой частотной модуляции), что позволяет использовать для синтеза уравнение (3.6).

Из (3.6) и (3.7) следует уравнение для модулирующей функции E_M :

$$\begin{aligned} E_M(\rho, \phi, t) &= \exp \left(i \frac{\alpha \phi}{c} \rho - i \alpha \phi t \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} j(z, t) \exp \left(-i \frac{\omega}{c} \phi z \right) dz. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из полученного уравнения следует, что модулирующая функция и амплитуда тока связаны преобразованием Фурье, что позволяет нам сразу выразить его амплитуду через модулирующую функцию:

$$j(z, t) = \frac{c}{2\pi\omega} \int_{-\phi_1}^{\phi_1} \exp \left(i \frac{\alpha \phi}{c} \rho - i \alpha \phi t \right) \exp \left(i \frac{\omega}{c} \phi z \right) d\phi, \quad (3.9)$$

или после вычисления интеграла

$$j(z, t) = \frac{c}{\pi\omega} \frac{\sin[(\omega/c)z - \alpha t + (\alpha/c)\rho]\phi_1}{(\omega/c)z - \alpha t + (\alpha/c)\rho}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) описывает форму амплитуды тока в антенне, которая представляет собой некоторую пространственную огибающую типа $\sin z/z$, "бегущую" вдоль оси z со скоростью $V_z = \alpha c/\omega$.

Ток в антенне $J(z, t) = j(z, t) \exp(-i\omega t)$ формирует в дальней зоне в диапазоне углов $-\phi_1 < \phi < \phi_1$ слабонеоднородную волну с угловым коэффициентом частотной модуляции α .

Пространственная огибающая (3.10) определяется лишь выбранной диаграммой направленности и может быть произвольной, например δ -образной. В последнем случае излучатель эквивалентен точечному монохроматическому источнику частоты ω ,

перемещающемуся со скоростью V_z . Понятно, что из-за эффекта Доплера максимальная смещенная частота будет наблюдаться впереди источника по ходу движения, минимальная – позади источника, а максимальный угловой коэффициент частотной модуляции – перпендикулярно вектору скорости. На то что движущийся монохроматический точечный источник является простейшим примером излучателя волны с поперечной частотной модуляцией, указал автору С.М. Рытов.

Далее мы покажем, что в неоднородной среде для формирования волны с поперечной частотной модуляцией возможно использование трансформации продольной модуляции в поперечную. Такой способ позволяет использовать обычные антенны, но обладает одним недостатком – зависимостью от конкретной структуры неоднородной среды.

§ 2. Нестационарное параболическое уравнение

Численные методы решения волновых задач в ряде случаев позволяют избежать сложных аналитических выкладок и быстро получить необходимый результат. К сожалению, численно решить полное волновое уравнение для реальных сред, например уравнение Клейна–Гордона для ионосферного распространения коротких радиоволн, не представляется возможным даже при современном уровне вычислительной техники. Поэтому использование "укороченных" параболических волновых уравнений, являющихся малоугловым приближением соответствующих "полных" уравнений, имеет смысл, в частности, для ионосферы, поскольку в этих задачах, во-первых, выполняются условия малоуглового приближения и, во-вторых, их можно решить численно.

Рассмотрим вариант вывода двумерного нестационарного параболического уравнения (НПУ) для УКГ (1.7) в декартовых координатах x, y [58, 93].

Представим волновое поле в виде

$$U = A(x, y, t) \exp(ik_0 x - i\omega_0 t). \quad (3.11)$$

После подстановки (3.11) в (1.7) и отбрасывания вторых производных по x и t получим нестационарное параболическое уравнение

$$2ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} + 2i \frac{\omega_0}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} A = 0. \quad (3.12)$$

Здесь A – "медленная" комплекснозначная функция переменных

x, y, t ; ω_0 – центральная частота волнового пакета, $k_0 = \omega_0/c$ – волновое число.

Если в процессе решения параболического уравнения гарантирована "медленность" комплексной амплитуды $A(x, y, t)$, то дифференциальное уравнение (3.12) может быть аппроксимировано конечно-разностным уравнением на пространственной и временной сетке с большим шагом, превосходящим длину волны и период осцилляций. Это и переводит задачу в класс решаемых численными методами.

Условие применимости параболического уравнения как раз и основано на "плавности" и "медленности" амплитуды A , что позволяет отбросить вторые производные по сравнению с первыми, т.е.:

$$2k_0 \frac{\partial A}{\partial x} \gg \frac{\partial^2 A}{\partial x^2};$$

$$2\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t} \gg \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Это условие реализуется, когда волна преимущественно распространяется вдоль оси x , имея малую угловую расходимость.

Очевидно, что дисперсионное соотношение для параболического уравнения и исходного УКГ совпадают неполностью. Перепишем дисперсионное соотношение для УКГ (1.10) в виде

$$(k_0 + K_x)^2 + K_y^2 = \frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2}. \quad (3.13)$$

Здесь мы разделили волновое число k и частоту ω на две части, где k_0 и ω_0 принадлежат плоской волне (3.11), а K_x, K_y, Ω входят в амплитудную функцию

$$A = A_0 \exp(iK_x x + iK_y y - i\Omega t). \quad (3.14)$$

То есть

$$U = A_0 \exp\{i(k_0 + K_x)x + iK_y y - i(\omega_0 + \Omega)t\}.$$

Подставляя (3.14) в (3.12), мы получим дисперсионное уравнение для НПУ:

$$2k_0 K_x + K_y^2 = \frac{2\omega_0 \Omega}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) может быть получено из (3.13), если отбросить члены K_x^2 и Ω^2 в выражениях $(k_0 + K_x)^2$ и $(\omega_0 + \Omega)^2$.

Следовательно, дисперсионное уравнение (3.15) аппроксимирует точный закон дисперсии для УКГ, если $k_0 \gg K_x$, $\omega_0 \gg \Omega$.

§ 3. Конечно-разностное уравнение для НПУ

Будем использовать следующую конечно-разностную аппроксимацию параболического уравнения (3.12):

$$A_{x,y}^{t+1} = A_{x,y}^{t-1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (A_{x+1,y}^t - A_{x-1,y}^t) + \frac{ic\Delta t}{k_0(\Delta y)^2} (A_{x,y+1}^t - 2A_{x,y}^t + A_{x,y-1}^t) - \frac{i\omega_L^2 \Delta t}{k_0 c} A_{x,y}^t. \quad (3.16)$$

Это явная, условно устойчивая, второго порядка точности по всем координатам схема [102]. Здесь A – цифровая комплекснозначная сеточная амплитудная функция, в которой верхние индексы обозначают временные слои, а нижние – номера узлов пространственной сетки. Величины Δt , Δx , Δy – шаги по осям t , x и y .

Ниже проведем расчет устойчивости сеточного уравнения (3.16).

Пусть

$$A = A_0 \exp(ik_x + ik_y) \quad (3.17)$$

– Фурье-мода волны.

Введем множитель перехода g между временными слоями, т.е.

$$A_{x,y}^{t+1} = g A_{x,y}^t; \quad A_{x,y}^{t-1} = \frac{A_{x,y}^t}{g}.$$

Подставляя (3.17) в (3.16) и сокращая на $A = A_0 \exp(ik_x + ik_y)$, получим

$$g - \frac{1}{g} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [\exp(ik_x \Delta x) - \exp(-ik_x \Delta x)] - \frac{ic\Delta t}{k_0(\Delta y)^2} \times \\ \times [\exp(ik_y \Delta y) - 2 + \exp(-ik_y \Delta y)] + \frac{i\omega_L^2 \Delta t}{k_0 c} = 0.$$

Учитывая, что

$$2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}; \quad i 2 \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha},$$

имеем

$$g - \frac{1}{g} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [2i \sin(k_x \Delta x)] - \frac{2ic\Delta t}{k_0(\Delta y)^2} \times \\ \times [\cos(k_y \Delta y) - 1] + \frac{i\omega_L^2 \Delta t}{k_0 c} = 0,$$

или

$$g^2 + ibg - 1 = 0, \tag{3.18}$$

где

$$b = \frac{c\Delta t}{\Delta x} [2i \sin(k_x \Delta x)] - \frac{2ic\Delta t}{k_0(\Delta y)^2} [\cos(k_y \Delta y) - 1] + \frac{i\omega_L^2 \Delta t}{k_0 c}.$$

Корни уравнения (3.18) имеют вид:

$$g_{1,2} = -\frac{ib}{2} \pm \sqrt{-\frac{b^2}{4} - 1}.$$

Для устойчивости разностной схемы (3.16) необходимо выполнение условия

$$|g| \leq 1.$$

Отсюда следует условие на b :

$$-2 \leq b \leq 2.$$

Поскольку это неравенство должно выполняться при любых аргументах гармонических функций, то условие устойчивости разностной аппроксимации для шагов сеточной функции:

$$\frac{1}{\Delta t} \geq \frac{c}{\Delta x} + \frac{2c}{k_0(\Delta y)^2} + \frac{\omega_L^2}{2k_0 c}.$$

Для использования конечно-разностной аппроксимации (3.16) параболического уравнения (3.12) необходимо обеспечить соответствие ее дисперсионного уравнения дисперсионному уравнению (3.15).

Для конечно-разностной схемы (3.16), как и для НПУ, дисперсионные уравнения для осей x и y различны, поэтому будем рассматривать их по отдельности.

Для оси x рассмотрим Фурье-моду

$$A = A_0 \exp(iK_x x - i\Omega t). \tag{3.19}$$

За начало координат возьмем центральную точку шаблона. Подставляя (3.19) в (3.16), имеем

$$\exp(i\Omega\Delta t) - \exp(-i\Omega\Delta t) - \frac{c\Delta t}{\Delta x} [\exp(iK_x\Delta x) - \exp(-iK_x\Delta x)] - \frac{\omega_L^2\Delta t}{k_0c} = 0,$$

или

$$2 \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(K_x\Delta x) = 2 \sin(\Omega\Delta t) - \frac{\omega_L^2\Delta t}{k_0c}.$$

При малых значениях $K_x\Delta x$ и $\Omega\Delta t$ это дисперсионное уравнение приближается к уравнению (3.15) для продольной координаты:

$$K_x = \frac{\Omega}{c} - \frac{\omega_L^2}{2k_0c}.$$

Условие аппроксимации можно записать как

$$\Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega}; \quad \Delta x \ll \frac{2\pi}{K_x}.$$

Для оси y рассмотрим Фурье-моду

$$A = A_0 \exp(iK_y y - i\Omega t). \quad (3.20)$$

Подставляя (3.20) в (3.16), имеем

$$\exp(i\Omega\Delta t) - \exp(-i\Omega\Delta t) - \frac{ic\Delta t}{k_0\Delta y} [\exp(iK_y\Delta y) - \exp(-iK_y\Delta y)] - \frac{i\omega_L^2\Delta t}{k_0c} = 0.$$

Перепишем это уравнение в другом виде:

$$\frac{c\Delta t}{k_0\Delta y} [\cos(K_y\Delta y) - 1] = 2 \sin(\Omega\Delta t) - \frac{\omega_L^2\Delta t}{k_0c}.$$

Мы получили дисперсионное уравнение для поперечной координаты конечно-разностного уравнения (3.16). При малых значениях $\Omega\Delta t$ и $K_y\Delta y$ оно приближается к дисперсионному уравнению (3.15) для поперечной координаты

$$K_y^2 = \frac{2k_0\Omega}{c} - \frac{\omega_L^2}{c^2}.$$

Здесь условие аппроксимации имеет аналогичный вид:

$$\Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega}; \quad \Delta y \ll \frac{2\pi}{K_y}.$$

§ 4. Результаты численных расчетов

Численное решение конечно-разностного уравнения (3.16) проводилось в прямоугольной пространственной области $[0, L_x]$, $[0, L_y]$ по осям x и y . Мы решали волновую задачу с нулевыми начальными условиями $A = 0$ и $\partial A / \partial t = 0$ при $t = 0$ для однородной среды. Нулевые условия задавались на границах $y = 0$; $y = L_y$ и $x = L_x$. На границе $x = 0$ волновая амплитуда задавалась следующим образом:

$$A = A_0 \exp \left\{ -\frac{(t-t_0)^2}{\sigma_t^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2} + i2\pi F_m(t-t_0)(y-y_0) \right\}. \quad (3.21)$$

Формула (3.21) описывает частотно-модулированный волновой пакет с гауссоидальной огибающей длительности σ_t по координате времени t и шириной σ_y по поперечной координате y . Величина поперечной частотной модуляции задается коэффициентом модуляции F_m . При расчетах были выбраны следующие параметры:

центральная частота $f_0 = \omega_0/2\pi$	5 МГц;
длительность σ_t	5 мкс;
ширина σ_y	1.2 км;
величина t_0	15 мкс;
величина y_0	4 км;
граница L_x	10 км;
граница L_y	8 км;
шаг Δx	0.04 км;
шаг Δy	0.05 км;
коэффициент частотной модуляции F_m	0.08 МГц/км.

На рис. 10 и 11 показано пространственное распределение модуля амплитуды $|A|$ в свободном пространстве без дисперсии (т.е. при $\omega_L = 0$). На рис. 10 показан волновой пакет при $t = 25$ мкс, а на рис. 11 при $t = 35$ мкс.

Аналогичное распределение поля показано на рис. 12–15 для однородной среды с частотной дисперсией при $f_L = \omega_L/2\pi = 3.5$ МГц. Рис. 12–15 соответствуют времени наблюдения $t = 25, 35, 45, 55$ мкс.

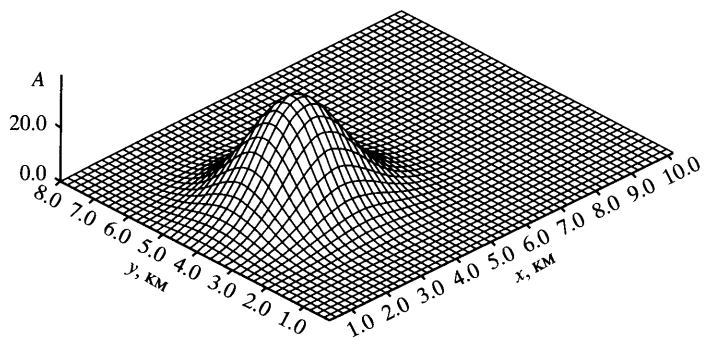


Рис. 10. Волновой пакет в бездисперсной среде, $t = 25$ мкс

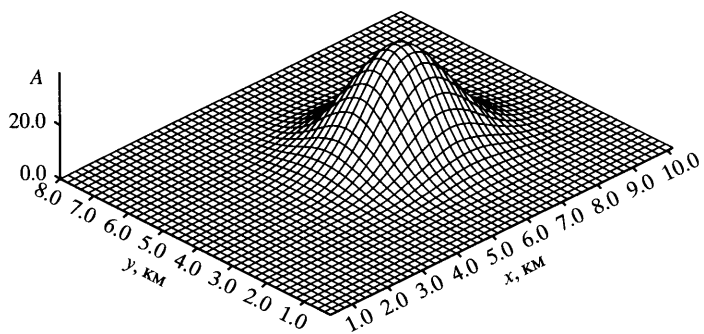


Рис. 11. Волновой пакет в бездисперсной среде, $t = 35$ мкс

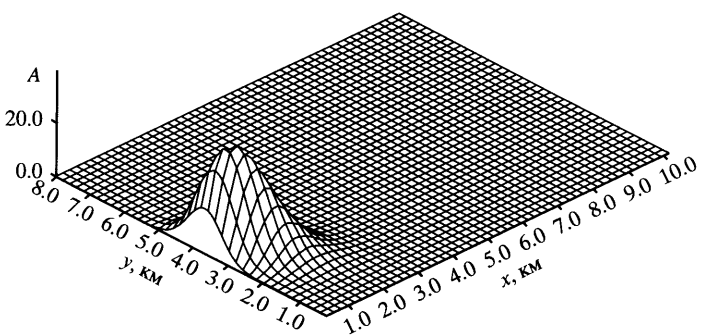


Рис. 12. Волновой пакет в диспергирующей среде, $t = 25$ мкс

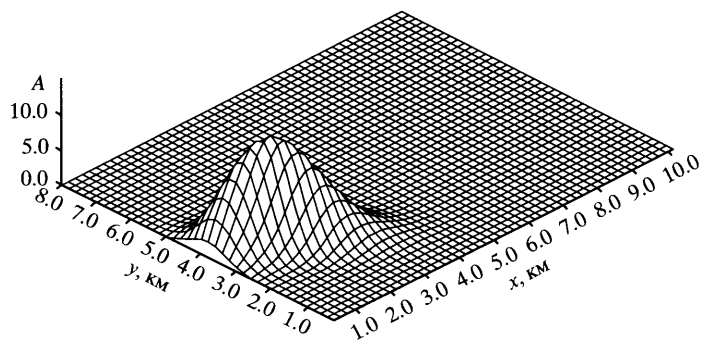


Рис. 13. Волновой пакет в диспергирующей среде, $t = 35$ мкс

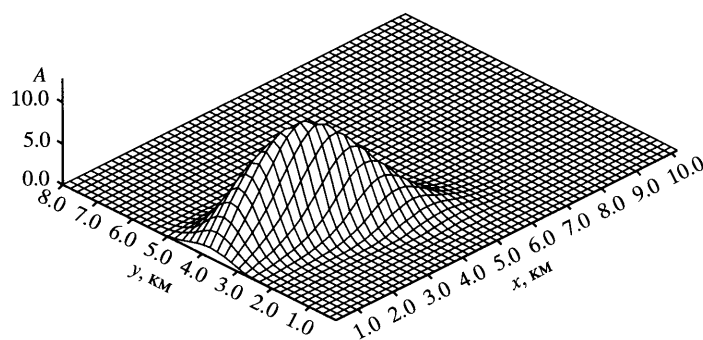


Рис. 14. Волновой пакет в диспергирующей среде, $t = 45$ мкс

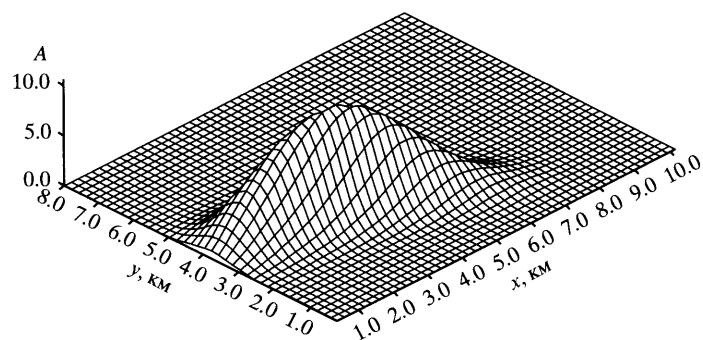


Рис. 15. Волновой пакет в диспергирующей среде, $t = 55$ мкс

§ 5. Обсуждение результатов

Из рис. 10–11 можно видеть, что двумерный волновой пакет с поперечной частотной модуляцией в однородной среде без частотной дисперсии распространяется прямолинейно, слабо расширяясь из-за дифракции.

Рис. 12–15 отчетливо демонстрируют влияние однородной среды с частотной дисперсией на форму волнового пакета. Во-первых, имеет место продольное растяжение пакета, которое часто называют дисперсионными искажениями. Во-вторых, хорошо виден поперечный сдвиг пакета к правой границе, который объясняется присутствием эффекта дисперсионной рефракции.

Оба этих эффекта имеют одинаковую природу, поскольку определяются нелинейной зависимостью между частотой ω и волновым числом k в дисперсионном уравнении. Дисперсионную рефракцию можно отнести к поперечным дисперсионным искажениям волнового пакета.

Первый эффект имеет более общий характер, поскольку может наблюдаться в одномерной среде. Поперечные искажения могут наблюдаться только в двумерных и трехмерных средах и не исследованы так хорошо, как продольные.